

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计

逐题详解

第 1-3 章；第 4 章至条件矩

Raisetsu41

2026 Autumn

26 October 2026

目录

第 1 章 概率、计数与分布函数	1
第 2 章 变换、期望与矩	9
第 3 章 常见分布族	16
第 4 章 联合分布与条件矩	24
英文作答	29

第1章 概率、计数与分布函数

Probability, Counting and Distribution Functions

依据: CB 2e Ch1; 本学期 Chapter 1 资料

P1-01 两枚硬币能否得到均匀的正面数

2026 PS1 Q1; CB 1.6

independence 独立性; sample space 样本空间

样本点为 TT、HT、TH、HH。独立性允许将单次概率相乘, 因此

$$P(X = 0) = (1-u)(1-w), \quad P(X = 1) = u(1-w) + (1-u)w, \quad P(X = 2) = uw.$$

若三者相等, 总和为 1 就要求每个等于 $1/3$ 。由第一项等于第三项, $1-u-w+uw = uw$, 得到 $u+w=1$ 。但固定和为 1 时, $uw \leq [(u+w)/2]^2 = 1/4 < 1/3$, 矛盾。因此不存在这样的独立硬币。不能只试 $u=w=1/2$ 后就声称所有偏硬币也不行; 上述不等式排除了全部可能。

P1-02 事件相交的界与导弹命中

2026 PS1 Q2、Q7; CB 1.13

union bound 并集上界; complement 补事件

1. 两事件用容斥恒等式。

$P(B) = 3/4$ 。由 $P(A \cup B) \leq 1$,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{12} > 0.$$

因此不能互斥。互斥与独立不同, 题目并未给出独立性。

2. 多事件把“全部发生”改写成“没有失败”。

设 H_i 为第 i 枚命中, 则

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1 - P(H_1^c \cup H_2^c \cup H_3^c) \geq 1 - 3(0.3) = 0.1.$$

此界不需要独立。直接写 0.7^3 则额外用了独立假设。

3. 独立时才乘失败概率。

$$P(\text{at least one hit}) = 1 - P(\text{all miss}) = 1 - 0.3^3 = 0.973.$$

P1-03 掷到首次出现 6

2026 PS1 Q3; CB 1.26

first success 首次成功; geometric distribution 几何分布

$T > 5$ 表示前 5 次均不是 6, 不要求第 6 次一定出现 6。因此

$$P(T > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0.401878.$$

而 $T = 5$ 表示前 4 次失败、第 5 次成功, 故 $P(T = 5) = (5/6)^4(1/6)$ 。 T 的支持集为 $1, 2, \dots$; 若数首次成功前的失败次数, 应另定义 $X = T - 1$, 支持集从 0 开始。

P1-04 电报误码与后验序列

2026 PS1 Q4; CB 1.41

prior 先验; likelihood 似然; posterior 后验; total probability 全概率

1. 先验与误码方向分别写清。

令 D 表示发送 dot, H 表示发送 dash, R_D, R_H 表示接收符号。先验 $P(D) = 3/7, P(H) = 4/7$ 。

$$P(R_H) = \frac{3}{7} \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \frac{2}{3} = \frac{41}{84}.$$

$$P(H | R_H) = \frac{(4/7)(2/3)}{41/84} = \frac{32}{41}.$$

分母包含接收到 dash 的两种来源, 不能只使用正确传输那一支。

2. 对收到 dot 先做一次 Bayes。

$$P(R_D) = \frac{3}{7} \frac{3}{4} + \frac{4}{7} \frac{1}{3} = \frac{43}{84}, \quad P(D | R_D) = \frac{27}{43}, \quad P(H | R_D) = \frac{16}{43}.$$

3. 在本题跨次独立假设下，后验按符号相乘。

Sent sequence	Posterior given two dots
DD	729/1849
DH	432/1849
HD	432/1849
HH	256/1849

分子之和为 1849，可核对总概率为 1。只有单次的 3 : 4 比例不足以推出序列独立；这里已显式给出必要假设。

P1-05 罕见疾病筛查与基准率

2026 PS1 Q10

sensitivity 灵敏度；specificity 特异度；prevalence 患病率

灵敏度是 $P(+ \mid D)$ ，特异度是 $P(- \mid D^c)$ ，因此假阳性率为 $P(+ \mid D^c) = 0.05$ ，不是 0.95。

$$P(D \mid +) = \frac{0.95(0.01)}{0.95(0.01) + 0.05(0.99)} = \frac{19}{118} \approx 0.161017.$$

可用 10000 人理解：约 100 名患者中 95 人阳性，9900 名健康人中 495 人阳性，所以阳性者中只有 $95/(95 + 495)$ 患病。一般地

$$h(\gamma) = \frac{0.95\gamma}{0.95\gamma + 0.05(1 - \gamma)} = \frac{19\gamma}{1 + 18\gamma}, \quad h'(\gamma) = \frac{19}{(1 + 18\gamma)^2} > 0.$$

$$h(\gamma) > \frac{1}{2} \iff 38\gamma > 1 + 18\gamma \iff \gamma > \frac{1}{20} = 0.05.$$

检测准确度与“阳性后患病概率”不是同一条件方向；罕见病的大量健康人会产生不可忽视的假阳性。

P1-06 尾概率重叠在单点

2026 PS1 Q8

point mass 点概率; inclusion-exclusion 容斥

$A = \{X \geq 2\}$ 与 $B = \{X \leq 2\}$ 的并集为整个样本空间, 交集为 $\{X = 2\}$ 。

$$1 = P(A \cup B) = a + b - P(X = 2) \Rightarrow P(X = 2) = a + b - 1.$$

点概率非负, 故 $a + b \geq 1$; 同时 $a, b \in [0, 1]$ 。不应把两个含等号的事件误认为互补事件。这个集合结论事实上不依赖 X 必须整数值。

P1-07 有限样本空间上的 sigma 代数

2026 PS1 Q9; 生成代数方法拓展

sigma-algebra sigma 代数; closure 封闭性; atom 原子

sigma 代数必须包含 S , 对取补和可数并封闭。虽然本集合族包含 $S, \emptyset$, 但

$$\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{B},$$

因此不是 sigma 代数, 找到一个反例已足够。最小生成代数的三个原子为 $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$, 任意原子并均必须纳入。因此共有 $2^3 = 8$ 个集合:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, S.$$

不要把集合族 $\mathcal{B}$ 与其中单个事件 B 混为一谈。

P1-08 不放回抽取与阶梯 CDF

2026 PS1 Q5; CB 1.51; 矩方法拓展

hypergeometric 超几何分布; without replacement 不放回; CDF 分布函数

1. 先确定可行数量。

$\max(0, 4 - 25) \leq X \leq \min(4, 5)$, 所以支持集是 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 。

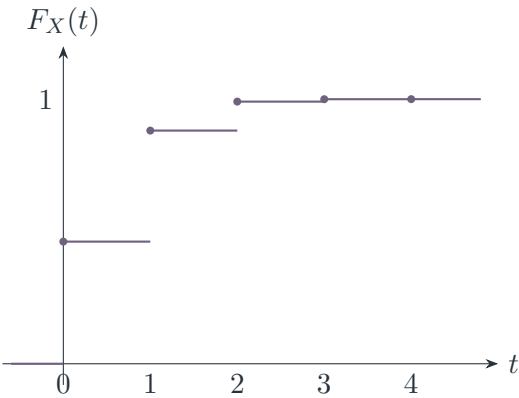
$$p_X(x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{25}{4-x}}{\binom{30}{4}}, \quad \binom{30}{4} = 27405.$$

选择一个样本后不能放回，不能用二项分布精确代替。依次代入 $x = 0, 1, 2, 3, 4$ 得到

$$(p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)) = \frac{1}{27405}(12650, 11500, 3000, 250, 5).$$

分子之和为 27405，核对归一化。累计这些质量，完整分段为

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 12650/27405 & 0 \leq t < 1, \\ 24150/27405 & 1 \leq t < 2, \\ 27150/27405 & 2 \leq t < 3, \\ 27400/27405 & 3 \leq t < 4, \\ 1 & t \geq 4. \end{cases}$$



跳跃后取值是该点 CDF，因此右连续；靠近 1 的几段很短，准确高度以分段公式为准。

$$EX = 4\frac{5}{30} = \frac{2}{3}, \quad \text{Var } X = 4\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{30}{30-1} = \frac{130}{261} \approx 0.498084.$$

末尾的有限总体修正 26/29 来自不放回导致的负相关。

P1-09 重复字母排列与指定字块

TA1 E6

permutation 排列; indistinguishable 相同不可区分; block 字块

1. 共 7 个位置, 两个 e 和两个 r 各自不可区分, 故 $7!/(2!2!) = 1260$ 。
2. 把 eye 合成一个物件, 剩 a,m,r,r, 共 5 个物件, 其中 r 重复两次, 故 $5!/2! = 60$ 。
e 与 y 已全部被字块使用, 不能再另外分配。
3. 两个字块 ram、eye 已使用 6 个字母, 剩下一个 r; 三个物件彼此不同, 故 $3! = 6$ 。两个字块不能重叠, 因为没有可用的公共重叠结构。

P1-10 无标签分组与过度计数

TA1 E8

unlabeled groups 无标签组; overcounting 重复计数

1. 两组各 3 人。

先选一组 $\binom{6}{3} = 20$, 但交换两组不产生新分法, 所以除以 $2!$, 得到 10。

2. 三个无标签对子。

先排 6 人, 再每 2 人一组; 每组内部 $2!$ 种顺序相同, 三个组之间 $3!$ 种顺序相同, 故

$$\frac{6!}{(2!)^3 3!} = 15.$$

3. 统一公式。

$$\frac{(kn)!}{(k!)^n n!}.$$

$(k!)^n$ 消除每组内部次序, $n!$ 消除组的排列。若组有固定标签, 如第一教室、第二教室, 就不能再除以 $n!$ 。

P1-11 未知硬币造成的条件依赖

TA1 E12; 第二次投掷为方法拓展

conditional independence 条件独立; mixture 混合

设 F 为双正面硬币, H_1, H_2 为两次正面。 $P(F) = 1/3$, $P(H_1 | F) = 1$; 另外两枚公平硬币总先验为 $2/3$ 。

$$P(H_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad P(F | H_1) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

第一次正面使双正面类型的后验上升, 所以

$$P(H_2 | H_1) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

但 $P(H_2) = 2/3$, 故无条件下不独立。给定同一硬币类型, 两次独立; 混合掉共同的未知类型后, 它们相关。不要在第二次重新随机选硬币, 题目说的是同一枚。

P1-12 从条件独立到无条件独立的证明

TA1 E14

partition 划分; conditional independence 条件独立

按划分使用全概率, 将交事件概率展开:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \sum_i P(A \cap B | C_i) P(C_i) \\ &= \sum_i P(A | C_i) P(B | C_i) P(C_i) \\ &= P(B) \sum_i P(A | C_i) P(C_i) \\ &= P(B) P(A). \end{aligned}$$

第二行使用给定 C_i 的条件独立; 第三行使用 B 与各 C_i 独立; 最后一行再用全概率。若缺少第三行的假设, 就不能把 $P(B | C_i)$ 提到求和号外, 上题的硬币正是警示。

P1-13 从 CDF 跳跃读出概率

TA2 E8

right continuity 右连续; jump 跳跃; left limit 左极限

每个点的质量是跳跃 $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$, 所以

$$p(-2) = 0.4, \quad p(0) = 0.1, \quad p(1) = 0.3, \quad p(4) = 0.2.$$

开区间 $(-1, 4)$ 包含 0、1, 不包含 4, 所以概率 $0.1 + 0.3 = 0.4$, 也等于 $F(4^-) - F(-1)$. 条件事件 $X \geq 0$ 的概率是 0.6; 其与 $-1 < X < 1$ 的交集只有点 0, 所以

$$P(-1 < X < 1 \mid X \geq 0) = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}.$$

离散分布中端点概率不能忽略; $F(1)$ 包含点 1, 而 $P(X < 1)$ 要用 $F(1^-)$ 。

P1-14 概率函数的合法性与归一化

TA2 E9-E11; 同一合法性方法合并

normalization 归一化; nonnegativity 非负性; monotonicity 单调性

1. PMF 必须逐点非负且总和等于 1。

$1/k$ 的调和级数发散, 不能归一为概率质量函数。第二个函数在偶数处为负, 即使其级数按特定顺序有有限和, 也违反非负性。第三个函数用裂项相消:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

所以它是合法 PMF。

2. PDF 在整个支持集积分为 1。

$$1 = c \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx = c \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8c}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{8}.$$

$c > 0$ 保证非负; 支持外密度为 0。

3. CDF 还必须具有正确极限并单调不减。

当 $|x| > 1$ 时候选函数为负, 且 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 -1 ; 单凭这两点即可否定。另有 $F'(x) = -4x/(1+x^2)^2$ 在 $x > 0$ 为负, 也违反单调性。

第2章 变换、期望与矩

Transformations, Expectations and Moments

依据: CB 2e Ch2; 本学期 Chapter 2 资料

P2-01 河流水位的分布变换

2026 PS1 Q6; CB 1.53

support 支持集; density 密度; affine transformation 仿射变换

1. 检验分布函数。

F_Y 从 0 开始, $y \geq 1$ 上导数 $2/y^3 > 0$, 在 1 处连续, 且无穷远趋 1。因此满足非减、右连续和两端极限。

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3} \mathbf{1}_{\{y>1\}}.$$

1 处没有跳跃, 故没有点质量。

2. 支持集先变换。

$Y \geq 1$ 给出 $Z \geq 0$ 。对 $z \geq 0$,

$$F_Z(z) = P\left(Y \leq 1 + \frac{z}{10}\right) = 1 - \frac{100}{(z+10)^2}.$$

对 $z < 0$ 为 0。求导得

$$f_Z(z) = \frac{200}{(z+10)^3} \mathbf{1}_{\{z>0\}}.$$

也可用 $f_Z(z) = f_Y(1+z/10)/10$ 核对。密度中的 $1/10$ 来自横轴伸长, 不能遗漏。

P2-02 指数变量的线性变换

TA2 E12; TA3 E5; CB 2.1(b)

rate 率参数; Jacobian 雅可比因子

这里 7 是率 λ , 尺度为 $1/7$ 。 $X > 0$ 变为 $Y > 3$ 。因此

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 3, \\ 1 - e^{-7(y-3)/4} & y > 3, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{7}{4} e^{-7(y-3)/4} \mathbf{1}_{\{y>3\}}.$$

逆变换 $x = (y - 3)/4$ 的导数为 $1/4$, 所以密度是 $f_X((y - 3)/4)/4$, 不是简单把 x 替换掉。令 $u = (y - 3)/4$, $dy = 4du$, 积分变为 $\int_0^\infty 7e^{-7u} du = 1$ 。此变量是平移后的指数型, 不能说其支持仍从 0 开始。

P2-03 双侧指数取绝对值

TA3 E1

Laplace distribution Laplace 分布; many-to-one 多对一

对 $y < 0$, 概率为 0; 对 $y \geq 0$, 事件 $|X| \leq y$ 等价于 $-y \leq X \leq y$, 所以

$$F_Y(y) = \int_{-y}^y \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} dx = 1 - e^{-\alpha y}.$$

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

也可将两个逆像 $x = y$ 和 $x = -y$ 的密度相加: $f_X(y) + f_X(-y)$ 。因此 Y 是率 α 、尺度 $1/\alpha$ 的指数变量。只保留正半轴的 $f_X(y)$ 会使积分变成 $1/2$, 正好暴露漏掉一支的问题。

P2-04 抛物线变换的两条逆支

TA3 E2

inverse branch 逆分支; uniform distribution 均匀分布

1. 配方确定值域。

$Y = 1 - (X - 1)^2$, 因此 $0 \leq Y \leq 1$ 。对 $0 < y < 1$,

$$Y \leq y \iff |X - 1| \geq \sqrt{1 - y}.$$

对应两段区间的总长度为 $2[1 - \sqrt{1 - y}]$, 乘均匀密度 $1/2$ 得

$$F_Y(y) = 1 - \sqrt{1 - y}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{1 - y}}.$$

CDF 在 $y \leq 0$ 为 0, $y \geq 1$ 为 1。

2. 两个根都在原支持内。

$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - y}$, 各自 $|dx_{\pm}/dy| = 1/[2\sqrt{1 - y}]$, 所以两支之和为 $2(1/2)/[2\sqrt{1 - y}]$, 与上式相同。虽然密度在 1 附近趋于无穷大, 积分仍为 1; 密度大于 1 不违反概率公理, 单点概率仍为 0。

P2-05 非对称支持上的平方变换

TA3 E3

piecewise density 分段密度; LOTUS 无意识统计学家定律

1. 先在原支持内筛根。

值域为 $0 < y < 4$ 。 $x = \pm\sqrt{y}$, 雅可比绝对值都是 $1/(2\sqrt{y})$ 。当 $0 < y < 1$ 两根都可行; 当 $1 < y < 4$ 只有正根可行。

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}/3 & 0 < y < 1, \\ \sqrt{y}/6 & 1 < y < 4, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. 积分时保留第一段积累的质量。

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ 2y^{3/2}/9 & 0 < y \leq 1, \\ (1 + y^{3/2})/9 & 1 < y < 4, \\ 1 & y \geq 4. \end{cases}$$

在 1 处两式均为 2/9，在 4 处得到 1。第二段若只从 1 积分而不加 $F_Y(1)$ ，会漏掉质量。

3. 不求新密度也能计算函数期望。

$$EY = E(X^2) = \int_{-1}^2 x^2 \frac{x^2}{3} dx = \left[\frac{x^5}{15} \right]_{-1}^2 = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}.$$

用 $\int y f_Y(y) dy$ 分两段也得到相同结果。

P2-06 概率积分变换与逆变换

TA3 E4

probability integral transform 概率积分变换；quantile 分位数

对 $0 < u < 1$ ，单调性允许反解事件：

$$P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

两端补上 0 和 1，便得到均匀 CDF。反向地，若 $U \sim U(0, 1)$ ，令 $X = F^{-1}(U)$ ，则

$$P(X \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

因此可用均匀随机数生成指定连续分布；一般 CDF 可采用广义逆 $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$ 。若 $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ ， $F(X)$ 仅取 1/2 和 1，各概率 1/2，不可能是连续均匀分布。连续性不是可以省略的装饰条件。

P2-07 三种矩的计算与中位数

TA3 E6、E7; CB 2.24、2.17(a)

raw moment 原点矩; variance 方差; median 中位数

1. 先求原点矩, 再相减。

第一种分布 $EX^k = \int_0^1 ax^{a+k-1}dx = a/(a+k)$ 。所以

$$EX = \frac{a}{a+1}, \quad EX^2 = \frac{a}{a+2}, \quad \text{Var } X = \frac{a}{(a+1)^2(a+2)}.$$

CDF 为 x^a , 中位数 m 解 $m^a = 1/2$, 故 $m = 2^{-1/a}$; 当 $a = 3$, $m = 2^{-1/3}$, 并非均值 $3/4$ 。

2. 离散均匀用等权求和。

$$EX = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j = \frac{n+1}{2}, \quad EX^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{Var } X = \frac{n^2-1}{12}.$$

3. 对称性先中心化。

令 $Z = X - 1$, 则支持 $(-1, 1)$, 密度 $3z^2/2$ 关于 0 对称, 所以 $EZ = 0, EX = 1$ 。

$$\text{Var } X = EZ^2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{3}{5}.$$

方差不随平移改变, 不能把 EX^2 直接当方差。

P2-08 混合寿命的生存函数

TA3 E8; CB 2.16

survival function 生存函数; memorylessness 无记忆性

1. 生存函数与 CDF 互补。

对 $x \geq 0$, $F(x) = 1 - ae^{-\lambda x} - (1-a)e^{-\mu x}$; $x < 0$ 时为 0。

$$f(x) = [a\lambda e^{-\lambda x} + (1-a)\mu e^{-\mu x}] \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

这是以概率 a 选择率 λ 的指数类型、以概率 $1-a$ 选择率 μ 的类型, 不是先把两个率加权再代入指数密度。

2. 先混合原点矩。

$$m = EX = \frac{a}{\lambda} + \frac{1-a}{\mu}, \quad EX^2 = \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{2(1-a)}{\mu^2},$$

$$\text{Var } X = EX^2 - m^2.$$

直接加权各分量的方差会漏掉不同类型均值的差异。

3. 检查生存概率是否可相乘。

无记忆需要 $S(t+s) = S(t)S(s)$ 。取 $s = t > 0$,

$$S(2t) - S(t)^2 = a(1-a)(e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})^2 > 0$$

当 $\lambda \neq \mu$ 时严格大于 0，因此不无记忆。不同生存时长会改变未知类型的后验权重。

P2-09 矩母函数的直接积分

TA3 E11; CB 2.30(b,c)

MGF 矩母函数; domain of convergence 收敛域; location-scale 位置尺度

1. 有界支持上的积分。

对 $t \neq 0$ ，分部积分给出

$$M(t) = \frac{2}{c^2} \int_0^c x e^{tx} dx = \frac{2[(ct-1)e^{ct} + 1]}{c^2 t^2}.$$

在 $t=0$ 按定义 $M(0)=1$ ；式子的表面 $0/0$ 是可去奇点。支持有界，所有实数 t 都存在。用积分求矩更简便： $EX^k = 2c^k/(k+2)$ ，所以 $EX = 2c/3$ 、 $EX^2 = c^2/2$ 、方差 $c^2/18$ 。展开 MGF 也得到同样导数。

2. 双侧尾部分开检查收敛。

令 $Z = X - \alpha$ ，在 0 两边分别积分：

$$M_X(t) = e^{\alpha t} \frac{1}{2\beta} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(t+1/\beta)z} dz + \int_0^{\infty} e^{(t-1/\beta)z} dz \right].$$

两侧同时有限要求 $-1/\beta < t < 1/\beta$ ，此时

$$M_X(t) = \frac{e^{\alpha t}}{1 - \beta^2 t^2}.$$

在 0 展开为 $1 + \alpha t + (\alpha^2/2 + \beta^2)t^2 + \cdots$, 故 $EX = \alpha$, $EX^2 = \alpha^2 + 2\beta^2$, 方差 $2\beta^2$ 。有公式但不写收敛域, 不能视为完整 MGF 答案。

第3章 常见分布族

Common Families of Distributions

依据: CB 2e Ch3; 本学期 Chapter 3 资料

P3-01 成功次数与停止规则

课堂离散分布、Quiz 1 方法改编; CB Ch3 分布族

Bernoulli trial Bernoulli 试验; binomial 二项; negative binomial 负二项

1. 固定试验次数, 数成功。

$$P(B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

写 $B_n = \sum I_j$, $E I_j = p$, $\text{Var } I_j = p(1-p)$ 。独立性使协方差为 0, 故 $E B_n = np$, 方差 $np(1-p)$ 。

2. 停在首次成功, 明确数试验还是失败。

$$P(T = t) = (1-p)^{t-1} p, \quad t \geq 1; \quad P(W = w) = (1-p)^w p, \quad w \geq 0.$$

令 $q = 1-p$ 。由 $\sum_{k \geq 0} q^k = 1/(1-q)$ 对 q 求导,

$$\sum_{k \geq 0} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k \geq 0} k(k-1) q^k = \frac{2q^2}{(1-q)^3}.$$

乘以 p 得 $EW = q/p$, $E[W(W-1)] = 2q^2/p^2$ 。所以

$$EW^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}, \quad \text{Var } W = EW^2 - (EW)^2 = \frac{q}{p^2}.$$

由于 $T = W + 1$, $ET = 1/p$, 两者方差均为 $(1-p)/p^2$ 。平移改变均值, 不改变方差。

$$P(T > m+n \mid T > m) = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(T > n).$$

3. 停在第 r 次成功，最后一次必须成功。

若有 w 次失败，总共 $w + r$ 次试验，前 $w + r - 1$ 次必须恰有 $r - 1$ 次成功：

$$P(N_r = w) = \binom{w+r-1}{r-1} p^r (1-p)^w, \quad w = 0, 1, \dots$$

它等于 r 段独立的“成功前失败数”之和，故 $EN_r = r(1-p)/p$ ，方差 $r(1-p)/p^2$ 。若数全部试验 $T_r = N_r + r$ ，均值为 r/p 。

P3-02 Poisson 饼干设计

TA4 E1; CB 3.7

Poisson parameter Poisson 参数; numerical root 数值求根

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda).$$

要求严格大于 0.99，即 $h(\lambda) = e^{-\lambda}(1 + \lambda) < 0.01$ 。 $h'(\lambda) = -\lambda e^{-\lambda} < 0$ 对 $\lambda > 0$ 成立，且 $h(0) = 1, h(\infty) = 0$ ，所以等式阈值唯一。数值解 $e^{-\lambda}(1 + \lambda) = 0.01$ 得 $\lambda_0 \approx 6.63835207$ ，因此需要 $\lambda > 6.63835207$ 。选择 6.64 可满足。“大于 99%”对应开区间，没有最小的实数解，6.63835207 是阈值近似；若平均数被额外限制为整数，最小整数才是 7。

P3-03 零截断 Poisson

TA4 E2; CB 3.13(a)

zero truncation 零截断; conditional PMF 条件质量函数

令 $q = P(X > 0) = 1 - e^{-\lambda}$ 。条件化要求把剩余概率除以 q ：

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k! q}, \quad k = 1, 2, \dots$$

CDF 在 $y < 1$ 为 0，在 $y \geq 1$ 为 $q^{-1} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\lfloor y \rfloor} \lambda^k / k!$ 。由于被删掉的 0 对一阶和二阶矩贡献都是 0，

$$EY = \frac{EX}{q} = \frac{\lambda}{q}, \quad EY^2 = \frac{\lambda + \lambda^2}{q},$$

$$\text{Var } Y = \frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{q^2}.$$

$0 < q < 1$ 使 $EY > \lambda$, 因为现在只观察正计数。将均值简单写为 $\lambda/(1-P(X=0))$ 在这里成立, 是因为截去的取值正好为 0; 一般截断不能无条件照抄。

P3-04 二项与负二项的尾事件对应

TA4 E3; CB 3.12

stopping time 停止时刻; tail probability 尾概率

事件 $T_r > n$ 表示到第 n 次结束仍未等到第 r 次成功, 等价于前 n 次成功至多 $r-1$ 次。因此

$$P(T_r > n) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

另一方面, $T_r = t$ 要求前 $t-1$ 次有 $r-1$ 次成功、最后一次成功:

$$P(T_r = t) = \binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r}, \quad t = r, r+1, \dots$$

所以也可将上式左边写成 $\sum_{t=n+1}^{\infty} \binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r}$ 。由于 $N_r = T_r - r$,

$$P(N_r > k) = P(B_{k+r} \leq r-1), \quad k \geq 0.$$

若使用 $P(T_r \geq n)$, 右边应换成前 $n-1$ 次的计数; 严格与非严格不等号不可互换。

P3-05 Poisson 稀释与被选事件

TA4 E4

thinning 稀释; conditional binomial 条件二项

给定总数 $N = n$ 后才有二项概率。对 $y = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{n=y}^{\infty} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^y}{y!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^y}{y!}. \end{aligned}$$

第二行令 $m = n - y$ ；第三行用指数级数。因此 $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$ 。本例均值 0.2，所以 $P(Y = 1) = 0.2e^{-0.2} = 0.16374615$ ， $P(Y \geq 1) = 1 - e^{-0.2} = 0.18126925$ ， $P(Y \leq 1) = 1.2e^{-0.2} = 0.98247690$ 。不能直接固定 $N = EN = 10$ 再用二项分布；随机总数混合后的分布已改变。

P3-06 高斯积分与 Gamma 半整数

TA4 E5

Gaussian integral 高斯积分；polar coordinates 极坐标；Gamma function Gamma 函数

设 $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx > 0$ 。非负积分可交换次序，极坐标的面积因子为 r ：

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

故 $I = \sqrt{\pi}$ ，取正根是因为积分为正。令 $u = x/\sqrt{2}$ ，得第一项 $\sqrt{2\pi}$ ；令 $z = (x - \mu)/\sigma$ ，得第二项 $\sigma\sqrt{2\pi}$ 。第三项利用 $d(e^{-x^2/2}) = -xe^{-x^2/2}dx$ 分部积分：

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/2} dx = [-xe^{-x^2/2}]_{-\infty}^\infty + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

最后由 $t = u^2$ ， $dt = 2u du$ ，

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

注意极坐标不可漏掉 r ，尺度变换不可漏掉 σ 。

P3-07 Gamma、指数与卡方的参数体系

TA4 E6

scale 尺度；shape 形状；chi-square 卡方；degrees of freedom 自由度

1. 识别 Gamma 积分。

$$M_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(1/\beta-t)x} dx = (1 - \beta t)^{-a}, \quad t < 1/\beta.$$

要求指数衰减系数为正。求导得 $M'(0) = a\beta$ 、 $M''(0) = a(a+1)\beta^2$ ，因此方差为 $a(a+1)\beta^2 - a^2\beta^2 = a\beta^2$ 。 $a=1$ 时密度为 $e^{-x/\beta}/\beta$ ，即尺度 β 、率 $1/\beta$ 的指数分布，其均值 β 、方差 β^2 。

2. 正态平方用高斯积分。

$$E(e^{tZ^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-2t)z^2/2} dz = (1-2t)^{-1/2}, \quad t < 1/2.$$

独立使和的 MGF 为乘积：

$$M_{\sum Z_j^2}(t) = (1-2t)^{-\nu/2}.$$

它与 $\text{Gamma}(\nu/2, 2)$ 的 MGF 在 0 附近一致，故和为 χ_ν^2 ，均值 ν ，方差 2ν 。

3. 翻译参数而非照抄位置。

率 $\lambda = 1/\beta$ 时，密度为 $\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(a)$ ，均值 a/λ 、方差 a/λ^2 。 $N(0, 1)$ 的第二参数为方差；一般 $N(\mu, \sigma^2)$ 中标准差为 σ 。

P3-08 Gamma 等待时间与 Poisson 次数

TA4 E7; CB 3.19

waiting time 等待时间; Poisson count Poisson 计数

Gamma 密度为 $t^{n-1}e^{-t}/(n-1)!$ 。定义尾积分 $S_n(x)$ ，分部积分给出

$$S_n(x) = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + S_{n-1}(x), \quad S_1(x) = e^{-x}.$$

重复递推，

$$P(G_n > x) = e^{-x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = P(N_x \leq n-1).$$

若将率为 1 的 Poisson 过程视作随机到达， G_n 是第 n 次到达时刻， N_x 是 x 之前的到达次数。“第 n 次还没来”与“已来至多 $n-1$ 次”是同一事件。纯积分证明不依赖先学习过程理论。

P3-09 指数变量的幂变换与 Weibull

TA4 E8; CB 3.24(a)

Weibull distribution Weibull 分布; raw moment 原点矩

$Y > 0$, 且幂函数单调递增。对 $y > 0$,

$$F_Y(y) = P(X \leq y^\gamma) = 1 - e^{-y^\gamma/\beta}, \quad f_Y(y) = \frac{\gamma}{\beta} y^{\gamma-1} e^{-y^\gamma/\beta}.$$

采用常见 Weibull 写法 $1 - e^{-(y/\eta)^\gamma}$, 形状为 γ , 尺度为 $\eta = \beta^{1/\gamma}$, 不是直接等于 β 。

$$EY^k = EX^{k/\gamma} = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty x^{k/\gamma} e^{-x/\beta} dx = \beta^{k/\gamma} \Gamma(1 + k/\gamma).$$

因此

$$EY = \beta^{1/\gamma} \Gamma(1 + 1/\gamma),$$

$$\text{Var } Y = \beta^{2/\gamma} [\Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma(1 + 1/\gamma)^2].$$

令 $\gamma = 1$ 回到尺度 β 的指数分布, 可核对公式。

P3-10 正态标准化、区间与分位数

连续分布课堂笔记; 标准化方法改编

standardization 标准化; standard deviation 标准差; percentile 百分位数

1. 先从参数辨认标准差。

$N(\mu, \sigma^2)$ 的第二参数为方差, 故 $\mu = 100, \sigma^2 = 225, \sigma = 15$ 。标准化 $Z = (X - 100)/15 \sim N(0, 1)$, 减均值后除标准差才使方差等于 1。

2. 每个端点单独标准化。

$$\begin{aligned} P(85 < X \leq 130) &= P(-1 < Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= 0.97724987 - [1 - 0.84134475] = 0.81859462. \end{aligned}$$

连续分布端点本身的概率为 0, 所以这里严格与非严格端点不改变结果。

$$P(X \geq 115) = P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) = 0.15865525.$$

3. 分位数是反向换算。

90 百分位数 $x_{0.9}$ 满足 $P(X \leq x_{0.9}) = 0.9$, 所以

$$\frac{x_{0.9} - 100}{15} = 1.28155157 \Rightarrow x_{0.9} = 119.22327355.$$

除以 225 会把标准化变量的方差变成 $225/225^2 = 1/225$, 不再是标准正态。

P3-11 对数正态的密度与矩

TA4 E9

lognormal 对数正态; normal MGF 正态矩母函数

逆变换 $z = \ln y$, 支持 $y > 0$, 雅可比为 $1/y$, 因此

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

对任意实数 k , $Y^k = e^{kZ}$, 使用正态 MGF:

$$EY^k = M_Z(k) = \exp\left(k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right).$$

$$EY = e^{\mu+\sigma^2/2}, \quad EY^2 = e^{2\mu+2\sigma^2}, \quad \text{Var } Y = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

e^μ 是中位数, 因为 $P(Z \leq \mu) = 1/2$; 它不是均值。非线性变换一般不满足 $Eg(Z) = g(EZ)$ 。所有幂矩存在不表示对数正态的 MGF 在正数 t 存在, 两者是不同积分。

P3-12 Beta 归一化与矩

TA4 E10; CB 3.22(d)

Beta function Beta 函数; normalizing constant 归一化常数

$$EX^k = \frac{\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}dx}{B(\alpha, \beta)} = \frac{B(\alpha+k, \beta)}{B(\alpha, \beta)}.$$

对整数 k , 反复用 $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ 可化为 $\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha+j)/(\alpha+\beta+j)$ 。

$$EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

相减通分得

$$\text{Var } X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

当两参数均为 1, $B(1, 1) = 1$, 密度在 $(0, 1)$ 恒为 1, 即 $U(0, 1)$, 均值 $1/2$ 、方差 $1/12$ 。此处 β 为 Beta 的第二形状参数, 与 Gamma 的尺度符号相同但含义不同。

P3-13 Cauchy 的对称为何不产生均值

连续分布课堂笔记: Cauchy; CB Ch3

Cauchy distribution Cauchy 分布; principal value 主值; absolute integrability 绝对可积

密度积分为 $[\arctan x / \pi]_{-\infty}^{\infty} = 1$ 。但

$$\int_0^R x f(x) dx = \frac{\ln(1 + R^2)}{2\pi} \rightarrow \infty.$$

负半轴的绝对贡献也发散, 因此正部、负部期望均无穷, EX 是未定义的 $\infty - \infty$, 不能记为 0。对称截断 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x f(x) dx = 0$ 只是 Cauchy 主值; 期望要求正负部不能同时无穷。另有 $EX^2 = \infty$, 且均值不存在, 所以没有有限方差; 不应把它当作均值 0、方差无穷的普通正态替代物。

第4章 联合分布与条件矩

Joint Distributions and Conditional Moments

依据: CB 2e Ch4; 本学期 Chapter 4 资料 pp.1-31

P4-01 联合概率表、条件矩与独立性

Ch4 Part1 课堂材料及本地笔记的离散例

joint 联合; marginal 边际; conditional variance 条件方差

按行求和得 $P(X = 0) = P(X = 1) = 0.5$; 按列求和得 $P(Y = 0) = 0.3, P(Y = 1) = 0.7$ 。若独立, 应有 $p(0, 0) = 0.5(0.3) = 0.15$, 实际为 0.2, 所以不独立。只有 (1, 1) 对乘积有非零贡献, 故 $E(XY) = 0.4$; $EX EY = 0.5(0.7) = 0.35$ 也与它不同。

$$P(X = 1 | Y = 1) = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}.$$

条件分布要除以被固定变量的边际。

给定 $X = 0$, $P(Y = 1 | X = 0) = 0.3/0.5 = 0.6$; 给定 $X = 1$ 时为 $0.4/0.5 = 0.8$ 。条件下 Y 为 Bernoulli, 因此

$$E(Y | X) = \begin{cases} 0.6 & X = 0, \\ 0.8 & X = 1, \end{cases} \quad \text{Var}(Y | X) = \begin{cases} 0.24 & X = 0, \\ 0.16 & X = 1. \end{cases}$$

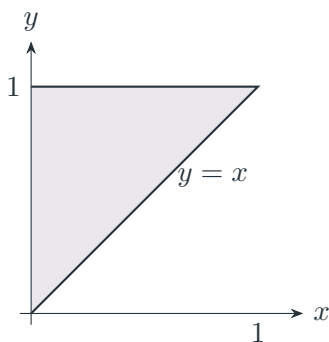
两者是随 X 取值变化的随机变量, 不是一个固定常数。加权平均 $0.5(0.6) + 0.5(0.8) = 0.7 = EY$, 在这个表中核对成立。

P4-02 三角形支持的联合与条件密度

Ch4 Part1 课堂材料: $0 < x < y < 1$ 的三角例

joint support 联合支持; conditional density 条件密度

1. 先画 $y = x$ 上方、单位正方形内的三角形。



面积 $1/2$ 乘密度 2 为 1 。固定 x , y 从 x 到 1 ; 固定 y , x 从 0 到 y :

$$f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 < x < 1; \quad f_Y(y) = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

联合支持不是边际支持的直积, 且 $f_X f_Y \neq 2$, 所以不独立。

2. 每个事件与原三角形求交。

$$P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} 2(1-x)dx = \frac{3}{4},$$

$$P(X + Y < 1) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} 2 dy dx = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 2xy dx dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4}.$$

3. 固定一个值, 先确定截线, 再归一化。

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{1}{y} \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}}, \quad f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{1-x} \mathbf{1}_{\{x < y < 1\}}.$$

因此 $X | Y = y \sim U(0, y)$, 条件均值 $y/2$ 、方差 $y^2/12$; $Y | X = x \sim U(x, 1)$, 条件均值 $(1+x)/2$ 、方差 $(1-x)^2/12$ 。给定连续值的事件概率为 0 , 条件密度来自密度比而不是直接除以 $P(Y = y) = 0$ 。

P4-03 联合 CDF 与矩形概率

Ch4 Part1 的联合 CDF 方法改编

joint CDF 联合分布函数；mixed derivative 混合偏导

大矩形 $\{X \leq b, Y \leq d\}$ 扣掉左边 $\{X \leq a, Y \leq d\}$ 与下边 $\{X \leq b, Y \leq c\}$ ，左下交叠部分加回，得到

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

在支持内混合偏导为 $f(x, y) = e^{-x-y}$ 。边际为 $f_X(x) = e^{-x}$, $f_Y(y) = e^{-y}$ ，支持 $x, y > 0$ 是直积，密度可分解，所以独立。

$$P = (1 - e^{-1})(e^{-1} - e^{-2}) \approx 0.14699594.$$

此时可用独立性乘两个区间概率；若尚未证明独立，先套四项 CDF 公式即可。一般联合 CDF 必须满足所有矩形的四项差非负，不能只检查分别单调。

P4-04 相同边际为何不能确定联合分布

Ch4 Part1 课堂反例：(U, U) 与 (U, 1 - U)

singular joint distribution 奇异联合分布；marginal information 边际信息

两种构造的 X, Y 边际均为 $U(0, 1)$ 。但第一种

$$F_1(x, y) = P(U \leq \min(x, y)) = \min(x, y),$$

第二种

$$F_2(x, y) = P(1 - y \leq U \leq x) = \max(0, x + y - 1)$$

在单位正方形内成立。比如 $(x, y) = (1/2, 1/2)$ ，两种 CDF 为 $1/2$ 和 0 ，而独立均匀的 CDF 应是 $xy = 1/4$ ，所以都不独立。第一种全部概率集中在直线 $y = x$ ，第二种集中在 $y = 1 - x$ 。这些线的二维面积为 0 ，任何普通二维密度在其上的面积积分均为 0 ，不可能产生概率 1 。因此没有关于二维面积的普通联合 PDF，即使每个边际都有连续密度。

P4-05 由条件密度重建联合密度

Ch4 Part1 条件密度方法改编

reconstruction 重建; shifted exponential 平移指数

1. 先乘边际与条件, 保留支持限制。

$f_X(x) = xe^{-x}$, $f_{Y|X}(y|x) = 1/x$ 对 $0 < y < x$ 成立, 所以

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \mathbf{1}_{\{0 < y < x\}}.$$

2. 固定 y 后, x 必须大于 y 。

$$f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = e^{-y}, \quad y > 0.$$

因此 Y 是尺度 1 的指数变量。反向条件为

$$f_{X|Y}(x|y) = e^{-(x-y)} \mathbf{1}_{\{x > y\}},$$

即 $X|Y=y$ 与 $y + \text{Exp}(\text{scale } 1)$ 同分布, 条件均值 $y+1$ 、方差 1。

3. 原方向条件由均匀性质给出。

$E(Y|X=x) = x/2$, $\text{Var}(Y|X=x) = x^2/12$ 。数值核对 $E[E(Y|X)] = EX/2 = 2/2 = 1 = EY$ 。不能因为联合密度写作 e^{-x} 没显式出现 y 就宣称独立, 非直积支持仍使二者相关。

P4-06 最小值的分布: 往年卷衔接题

2024 数理统计期中卷 Q3(a) 的基础分布部分

minimum 最小值; independent sample 独立样本; order statistic 次序统计量

1. 最小值超过 x 等价于每一个都超过 x 。

$$P(M > x) = P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{j=1}^n [1 - F(x)] = [1 - F(x)]^n.$$

因此

$$F_M(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad f_M(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x).$$

独立性是乘积的理由；相同分布是每个因子都写成同一个 F 的理由。若原变量为率 λ 的指数，尾函数 $e^{-\lambda x}$ 对 $x \geq 0$ 成立，故 $P(M > x) = e^{-n\lambda x}$ ， M 为率 $n\lambda$ 、尺度 $1/(n\lambda)$ 的指数变量。最早到来的等待时间应更短，均值 $1/(n\lambda)$ 可作方向核验。

英文作答

English Solutions

P1-01

Equality would force each probability to be $1/3$. Equality of zero and two heads gives $u + w = 1$, but then $uw \leq 1/4$, contradicting $uw = 1/3$. No such independent coins exist.

P1-02

The intersection is at least $1/12$, so the events cannot be disjoint. The union bound guarantees an all-hit probability of at least 0.1 . With independence, the probability of at least one hit is 0.973 .

P1-03

$P(T > 5) = (5/6)^5$. It imposes no condition on roll six. In contrast, $P(T = 5) = (5/6)^4(1/6)$ requires success on the fifth roll.

P1-04

The posterior probability of a sent dash given a received dash is $32/41$. Given a received dot, the posterior dot and dash probabilities are $27/43$ and $16/43$. For two independent uses the four sequence probabilities are $729, 432, 432, 256$, each divided by 1849 .

P1-05

The positive predictive value is $19/118 \approx 0.161017$. For prevalence γ it is $19\gamma/(1 + 18\gamma)$, an increasing function. It exceeds one half exactly when $\gamma > 0.05$.

P1-06

The events cover the sample space and overlap at $X = 2$. Thus $P(X = 2) = a + b - 1$ and $a + b \geq 1$.

P1-07

The family is not a sigma-algebra because it omits the complement of $\{1\}$. Its generated sigma-algebra consists of all eight unions of the three atoms $\{1\}$, $\{2\}$ and $\{3, 4, 5, 6\}$.

P1-08

The PMF is $\binom{5}{x} \binom{25}{4-x} / \binom{30}{4}$ for $x = 0, \dots, 4$. The CDF is the right-continuous cumulative sum of these masses. The mean is $2/3$ and variance $130/261$.

P1-09

The counts are 1260, 60, and 6. Divide out repetitions of identical letters, and treat each required consecutive block as a single object.

P1-10

There are 10 partitions into two triples and 15 into three pairs. In general the count is $(kn)! / [(k!)^n n!]$. The two denominator factors remove within-group and between-group order.

P1-11

The posterior probability of the two-headed coin is $1/2$. The next-head probability is $3/4$, exceeding its unconditional value $2/3$. The tosses are conditionally independent given coin type, but not independent marginally.

P1-12

Expand $P(A \cap B)$ over the partition. Conditional independence factors each summand, and independence of B from C_i replaces $P(B \mid C_i)$ by $P(B)$. Total probability then gives $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

P1-13

The masses at $-2, 0, 1, 4$ are $0.4, 0.1, 0.3, 0.2$. The requested probabilities are 0.4 and $1/6$. Open endpoints require left limits when a CDF jumps.

P1-14

Only $1/[k(k+1)]$ is a valid PMF. The first series diverges and the second has negative masses. The PDF normalizer is $c = 3/8$. The proposed CDF is invalid because it takes negative values, has the wrong limit and decreases for positive x .

P2-01

The CDF is valid and $f_Y(y) = 2/y^3$ for $y > 1$. For $z \geq 0$, $F_Z(z) = 1 - 100/(z+10)^2$, with density $200/(z+10)^3$; both vanish below the support.

P2-02

Seven is the rate. The support is $y > 3$, the CDF is $1 - e^{-7(y-3)/4}$ there, and the density is $(7/4)e^{-7(y-3)/4}$. Its integral is one by the inverse change of variables.

P2-03

Y is exponential with rate α and scale $1/\alpha$. Its CDF is $1 - e^{-\alpha y}$ for $y \geq 0$. Both inverse branches contribute to the density.

P2-04

The support is $[0, 1]$. For $0 < y < 1$, $F_Y(y) = 1 - \sqrt{1-y}$ and $f_Y(y) = 1/[2\sqrt{1-y}]$. Both inverse roots lie in $(0, 2)$ and must be included.

P2-05

The density is $\sqrt{y}/3$ on $(0, 1)$ and $\sqrt{y}/6$ on $(1, 4)$. The CDF is $2y^{3/2}/9$ then $(1 + y^{3/2})/9$. The mean is $EX^2 = 11/5$. The negative inverse branch disappears once $y > 1$.

P2-06

For $0 < u < 1$, $P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = u$. Conversely $F^{-1}(U)$ has CDF F . A Bernoulli variable gives a two-point $F(X)$, so the unconditional statement fails for discrete distributions.

P2-07

The first distribution has mean $a/(a+1)$, variance $a/[(a+1)^2(a+2)]$, and median $2^{-1/a}$. Discrete uniform mean and variance are $(n+1)/2$ and $(n^2-1)/12$. The final symmetric distribution has mean 1 and variance $3/5$.

P2-08

The distribution is an exponential mixture. Its first two moments are $a/\lambda + (1-a)/\mu$ and $2a/\lambda^2 + 2(1-a)/\mu^2$. Subtract the squared mean for variance. Unequal rates violate memorylessness because $S(2t) > S(t)^2$.

P2-09

The bounded-density MGF is $2[(ct-1)e^{ct}+1]/(c^2t^2)$ with value 1 at zero, and exists for all real t ; its mean and variance are $2c/3$ and $c^2/18$. The Laplace MGF is $e^{\alpha t}/(1-\beta^2t^2)$ for $|t| < 1/\beta$, giving mean α and variance $2\beta^2$.

P3-01

A fixed trial count gives a binomial success count. Stopping at the first success gives a geometric trial count on $1, 2, \dots$ or failure count on $0, 1, \dots$. Stopping at success r gives a negative-binomial failure count; the final trial must be a success.

P3-02

Require $e^{-\lambda}(1+\lambda) < 0.01$. This expression is strictly decreasing for positive λ , with unique threshold 6.63835207. Any greater value works; 6.64 is a practical choice.

P3-03

Divide the positive Poisson probabilities by $q = 1 - e^{-\lambda}$. The mean is λ/q and variance $\lambda/q - \lambda^2 e^{-\lambda}/q^2$. Removing zeros raises the conditional mean.

P3-04

Not reaching success r by trial n means at most $r - 1$ successes among those trials. The PMF is $\binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r}$. Shifting by r gives $P(N_r > k) = P(B_{k+r} \leq r - 1)$.

P3-05

Summing the conditional binomial probabilities over the Poisson count gives $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. For mean 0.2, the probabilities are 0.16374615, 0.18126925 and 0.98247690.

P3-06

Squaring the integral and changing to polar coordinates gives $I^2 = \pi$. The three real-line integrals are $\sqrt{2\pi}$, $\sigma\sqrt{2\pi}$ and $\sqrt{2\pi}$. Substituting $t = u^2$ in the Gamma integral gives $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

P3-07

The Gamma MGF is $(1 - \beta t)^{-a}$ for $t < 1/\beta$. Shape one is exponential with scale β . A squared standard normal has MGF $(1 - 2t)^{-1/2}$; summing ν independent squares gives $\chi_\nu^2 = \text{Gamma}(\nu/2, 2)$, with mean ν and variance 2ν .

P3-08

Integration by parts gives the survival recursion and hence $e^{-x} \sum_{j=0}^{n-1} x^j / j!$. This is the probability of at most $n - 1$ Poisson arrivals by time x , equivalently waiting beyond x for arrival n .

P3-09

The CDF is $1 - e^{-y^\gamma/\beta}$ and the density is $(\gamma/\beta)y^{\gamma-1}e^{-y^\gamma/\beta}$. Weibull shape is γ and its usual scale is $\beta^{1/\gamma}$. Moments follow from $EY^k = \beta^{k/\gamma}\Gamma(1 + k/\gamma)$.

P3-10

The standard deviation is 15, so use $Z = (X - 100)/15$. The probabilities are 0.81859462 and 0.15865525. The 90th percentile is $100 + 15(1.28155157) = 119.22327355$.

P3-11

The density includes the inverse Jacobian $1/y$. Moments are $EY^k = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$. The mean is $e^{\mu + \sigma^2/2}$ and variance $e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. The value e^μ is the median, not the mean.

P3-12

The raw moment is $B(\alpha + k, \beta)/B(\alpha, \beta)$. The mean is $\alpha/(\alpha + \beta)$ and variance $\alpha\beta/[(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)]$. Beta(1, 1) is uniform on (0, 1).

P3-13

The density integrates to one. Its positive and negative first-moment contributions both diverge, so the expectation is undefined. Symmetric principal value zero is not an expectation. No finite variance exists.

P4-01

The marginals are (0.5, 0.5) for X and (0.3, 0.7) for Y ; they are not independent. $E(XY) = 0.4$ and $P(X = 1 | Y = 1) = 4/7$. Conditional means are 0.6, 0.8 and variances 0.24, 0.16, whose mean check gives $EY = 0.7$.

P4-02

Marginals are $2(1 - x)$ and $2y$ on (0, 1), and the variables are dependent. The requested probabilities and product moment are $3/4$, $1/2$ and $1/4$.

The conditionals are uniform on $(0, y)$ and $(x, 1)$, giving their means and variances directly.

P4-03

The rectangle probability is $F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$. The PDF factors as $e^{-x}e^{-y}$ on a product support, so the variables are independent. The numerical probability is approximately 0.14699594.

P4-04

Both pairs have uniform marginals, but joint CDFs $\min(x, y)$ and $\max(0, x+y-1)$ on the unit square. Neither is independent. Each joint law is concentrated on a line, so neither has an ordinary two-dimensional PDF.

P4-05

The joint density is e^{-x} on $0 < y < x$. The marginal Y is exponential with scale one. Given $Y = y$, X is y plus an exponential variable, with mean $y + 1$ and variance one.

Given $X = x$, the conditional mean and variance of Y are $x/2$ and $x^2/12$.

P4-06

The survival probability of the minimum is $[1 - F(x)]^n$, giving CDF $1 - [1 - F(x)]^n$ and density $n[1 - F(x)]^{n-1}f(x)$. For exponential inputs, the minimum is exponential with rate $n\lambda$.